

23. Сформулируйте необходимые и достаточные условия продуктивности неотрицательной, неразложимой матрицы в модели Леонтьева и докажите, что матрица является продуктивной или не является таковой.

Определение 1. Квадратная матрица $A (N \times N)$ называется *разложимой*, если одновременной перестановкой строк и столбцов её можно представить в виде

где $A_1 (m \times m)$, $A_3 ((N-m) \times (N-m))$, $m < N$.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

Утверждение 1. Если матрица A разложима, то и матрица A^2 разложима, причём

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & \tilde{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$$

Теорема (Фробениуса-Перрона). Если неотрицательная матрица A неразложима, то у неё существует собственное число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ справедливо $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый собственный вектор-столбец $\mathbf{x}_A$, ($A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A$), и левый собственный вектор-строка $\mathbf{y}_A$, ($\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A$), положительны.

Собственное число λ_A называют *фробениусовым числом*, а векторы $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{y}_A$ — *правым и левым фробениусовыми векторами*.

Пусть $r = \min r_i$, $R = \max r_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$.

Утверждение 3. Если A неотрицательная неразложимая матрица, то при $r < R$ ее фробениусово число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Доказательство Пусть вектор $\mathbf{y}_A$ таков, что $\sum_{i=1}^N y_A^i = 1$. Умножим равенство $\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A$ справа на вектор-столбец $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Получим $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} y_A^i = \lambda_A \sum_{i=1}^N y_A^i = \lambda_A$. Поменяв в левой части равенства порядок суммирования, имеем $\sum_{i=1}^N y_A^i \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{i=1}^N y_A^i r_i = \lambda_A$. Строгие неравенства следуют из того, что вектор $\mathbf{y}_A$ положителен и $r < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$

Определение 3. Неотрицательную матрицу A назовём *продуктивной*, если существует неотрицательная матрица $(E-A)^{-1}$.

Утверждение 4. Неотрицательная неразложимая матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда её фробениусово число $\lambda_A < 1$.

Доказательство: Достаточность. Пусть $\lambda_A < 1$. Если $\mathbf{x}_A$ правый фробениусов вектор, то $A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A$. Отсюда и из положительности компонент вектора $\mathbf{x}_A$ следует, что $A^k \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} E - A^k &= (E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\ E &= \lim_{k \rightarrow \infty} (E - A^k) = (E - A) \lim_{k \rightarrow \infty} (E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\ E &= (E - A)(E - A)^{-1} = (E - A) \cdot \text{const}, \\ &\text{где } \text{const} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1} \end{aligned}$$

Необходимость. Пусть матрица $(E-A)^{-1} \geq 0$. Для вектора $\mathbf{p} > 0$ решение $(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{p}$ существует и $\mathbf{x} = (E-A)^{-1}\mathbf{p} > 0$. Очевидны соотношения $\lambda_A \mathbf{y}_A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A (\mathbf{x} - \mathbf{p}) < \mathbf{y}_A \mathbf{x}$. Отсюда и из положительности числа $\mathbf{y}_A \mathbf{x}$ следует неравенство $\lambda_A < 1$ ■

Задача.

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы определить продуктивна матрица A или нет мы должны найти её фробениусово число λ_A . В случае, если $\lambda_A < 1$, матрица A будет продуктивной, иначе – нет.

$r_1 = 0,7, r_2 = 1, r_3 = 0,9$, значит $r = 0,7, R = 1$. Поскольку $r < R$, то $\lambda_A < R = 1$. Ответ: Матрица A продуктивна.

24. Опишите математическую модель коллективного поведения П.С. Краснощёкова и рассмотрите случай, когда у всех членов коллектива коэффициенты индивидуализма равны нулю (стадо).

Пусть ЛПР ($i = 1, N$) может принять одно из двух $S = 1,2$ альтернативных решений.

Пусть μ_i есть коэффициент индивидуализма (самостоятельности) i -ого ЛПР. При $\mu = 1$ данное ЛПР абсолютно самостоятельно, а при $\mu = 0$ — это абсолютный конформист, меняющий решения в угоду любому чужому мнению.

α_j - априорная вероятность принятия индивидом j решения "1"

Апостериорная вероятность (вероятность после общения с коллективом) того, что i -ый индивид примет решение с номером "1" равно $p_i \in [0, 1]$, а с номером "2" равно $1 - p_i$.

Модель Краснощёкова описывает способ вычисления апостериорной вероятности принятия решения $s = 1$ с учетом коэффициента индивидуализма:

$$p_i = \alpha_i \mu_i + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j,$$

В этой формуле $\lambda_{ij} \in [0, 1]$ — вероятность того, что i -е ЛПР примет решение $s = 1$ после общения с j -м ЛПР, при условии, что j -е ЛПР придерживается $s = 1$ -й альтернативы.

Модель Краснощёкова в матричной форме:

$$P = AM + (E - M)\Lambda P$$

В случае "стада" ($\mu_i = 0$ для всех i) $M = 0$. Таким образом, $(E - \Lambda)P = 0$. То есть определитель матрицы $E - \Lambda$ равен нулю, а у этого уравнения

существует бесконечное число решений. Однако, стадо движется не хаотично: все p_i равны между собой, то есть индивиды подражают друг другу:

$$p_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j$$

При этом, если в коллективе появился индивид, у которого $\mu_k > 0$, то решения модели становится единственным: $p_i = \alpha_k$, то есть все копируют поведение k —того индивида.